Απειροστικός Λογισμός III 21/11/2016

14ο μάθημα

Ορισμός:

Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

- Η $\bar{f}$ λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$, αν $\exists D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική με $\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$

$D \in \mathbb{R}^{m \times n} \Leftrightarrow$

Σε κάθε γραμμική απεικ. $D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί μοναδικά ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ δηλ. $D(\bar{x}) = D\bar{x}$

$= \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Θεώρημα*:

Έστω $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U \Rightarrow$

α) η $\bar{f}$ είναι συνεχής στο $\bar{x}$

β) η $\bar{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ και $D = J_{\bar{f}}(\bar{x}) \to$ Ιακωβιανός πίνακας.

Ορισμός:

Αν $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, τότε (και μόνο τότε!) ο Ιακωβιανός πίνακας ονομάζεται παράγωγος της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$.

Δηλαδή ο πίνακας $D = J_{\bar{f}}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ή αντίστοιχα η γραμμική απεικόνιση $D = J_{\bar{f}}(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και συμβολίζεται

$D\bar{f}(\bar{x}) := J_{\bar{f}}(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(αλλά συμβολίζεται και με άλλους τρόπους πχ $d\bar{f}(\bar{x})$)

και ονομάζεται και διαφορικό της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$.

Ορισμός:

- Αν η $\bar{f}$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $\bar{x} \in U$, τότε λέμε ότι η $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη και έχει παράγωγο $D\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$ ή αντίστοιχα $D\bar{f} : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) =:$ ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$.

Προσοχή: Η τιμή της $Df(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ για $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ είναι η $\boxed{Df(\bar{x})\bar{u} \in \mathbb{R}^m}$

ενώ μια απεικόνιση $\bar{u} \longmapsto Df(\bar{x})\bar{u}$

Απόδειξη Θεωρήματος*:

α) $\lim\limits_{\bar{u}\to\bar{0}} \left(f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) \right) =$

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \left(\|\bar{u}\| \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{u}}{\|\bar{u}\|} + D\bar{u} \right) =$$

$$\underbrace{\left(\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \|\bar{u}\|\right)}_{0 \text{ προφανώς}} \underbrace{\left(\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{u}}{\|\bar{u}\|}\right)}_{\bar{0} \text{ από ορισμό}} + \underbrace{\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} (D\bar{u})}_{\bar{0}} = \bar{0}$$

$\bar{0}$, διότι $\|D\bar{u}\|^2 =$

$$= \left\| \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_n \end{pmatrix}^* \right\|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left((d_{j1}, \dots, d_{jn}) \cdot \bar{u} \right)^2}_{\leq \|(d_{j1},\dots,d_{jn})\|^2 \|\bar{u}\|^2 = \bar{0}} =$$

$$\leq \|\bar{u}\|^2 \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_{ji}^2 \right)$$

$$=: \|\bar{u}\|^2 \; \|D\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|D\bar{u}\| \leq \|D\| \, \|\bar{u}\| \xrightarrow{\bar{u}\to\bar{0}} 0$$

Άρα $\|D\bar{u}\| = \bar{0}$

β) (συνθ. $\bar{f}$ διαφ. στο $\bar{x} \Rightarrow D = J_{\bar{f}}(\bar{x})$)

Έχουμε $\lim\limits_{\bar{u}\to\bar{0}} \dfrac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0} \iff \forall j = 1, .., m$

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{f_j(\bar{x}+\bar{u}) + f_j(\bar{x}) - (d_{j1}, \dots, d_{jn}) \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} = 0$$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta) \setminus \{\bar{0}\} \; \forall j = 1, \dots, m$

$$\frac{|f_j(\bar{x}+\bar{u}) - f_j(\bar{x}) - (d_{j1}, \dots, d_{jn}) \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Θεωρώ όλα τα $\bar{\eta} = h\bar{e}_i = h(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

i-θέση

και έχω $\forall j=1,\dots,m \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall h\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$

$$\frac{|f_i(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f_i(\bar{x})-hd_{ji}|}{|h|} < \varepsilon \qquad \forall i=1,\dots,n$$

[[$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall h\in\mathbb{R}$ με $0<|h|<\delta$:
$|g(h)|<\varepsilon \iff \lim_{h\to 0} g(h)=0$]]

δηλ. έχω $\lim_{h\to 0} \dfrac{f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i)+f_j(\bar{x})-hd_{ji}}{h} = 0$

$\iff \lim_{h\to 0} \dfrac{f_i(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f_j(\bar{x})}{h} = d_{ji}$

$\iff \dfrac{\partial f_j(\bar{x})}{\partial x_i} = d_{ji} \qquad \forall j=1,\dots,m \quad \forall i=1,\dots,n$

$\iff D = J_{\bar{f}}(\bar{x})$

Θεώρημα:
Έστω $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, f μερικώς διαφορίσιμη.
Αν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U\to\mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n$ είναι συνεχείς στο $\bar{x}\in U$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

[[f μερ. διαφ. σε μια περιοχή του $\bar{x}$ (δηλ. σε κάποιο $U\subset\mathbb{R}^n$ με $B(\bar{x},\delta)\subset U$) $\oplus$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$ συνεχείς ~~σε μια περιοχή~~ στο $\bar{x}$ $\Rightarrow$ f διαφορίσιμη ~~περιοχή~~ στο $\bar{x}$]]

__απόδειξη__
Έστω ότι $U=\mathbb{R}^n$. (για $U\subset\mathbb{R}^n$ απλώς πρέπει να είμαι σίγουρος ότι όλα τα διανύσματα κοντά στο $\bar{x}$ που εμφανίζονται, είναι στο U).

Θεωρούμε $\bar{y}^{(k)} := \bar{x} + \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{e}_i \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$= \bar{x} + (u_1, u_2, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$$

$\Rightarrow \bar{y}^{(k)} - \bar{y}^{(k-1)} = u_k \bar{e}_k$ και θέτουμε $\bar{y}^{(0)} = \bar{x}$

ΘΜΤ μιας πραγμ. μεταβλητής

$$f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)})$$

$$= f(\bar{y}^{(k-1)} + u_k \bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)})$$

$$(= g(u_k) - g(0))$$

$$= \underbrace{u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k)}_{= g'(\theta_k u_k)} \quad \text{με } \theta_k \in (0,1).$$